

Sterowanie Procesami Dyskretnymi

Laboratorium 3

Opracowanie i implementacja algorytmów dla problemu $FP||C_{\max}$

prowadzący: dr inż. Radostaw Idzikowski

1 Cel laboratorium

Celem laboratorium jest zapoznanie się z podstawami teorii szeregowania zadań oraz sposobami modelowania oraz rozwiązywania podstawowych problemów wielomaszynowych na przykładzie permutacyjnego problemu przepływowego (*Permutation Flow Shop Problem* lub *Permutation Flow Shop Scheduling Problem*). Obejmuje to odpowiednie zdefiniowanie problemu (ograniczeń i funkcji celu), danych wejściowych oraz implementację dedykowanych algorytmów, a także interpretację wyników.

2 Przebieg zajęć

Laboratorium obejmuje zajęcia nr 5-7 (6 godzin zajęć w tym oddanie). Praca odbywa się w ramach dwuosobowych zespołów. Każdy zespół otrzymuje do opracowania ten sam problem. W tym wypadku $FP||C_{\max}$ oraz dedykowane dla niego algorytmy.

W trakcie zajęć nr 5 w wybranym języku python, C/C++, Java, C# lub Julia należy zaimplementować metodę generowania instancji przy użyciu załączonych generatorów dla zadanych parametrów (źródło, rozmiar, zakres). Kolejnym krokiem jest implementacja metody oceniania rozwiązania (liczenia funkcji celu). Następnie należy zacząć implementację algorytmu Johnsona dla dwóch maszyn.

W trakcie zajęć nr 6 należy dokończyć rozpoczęte zadanie z poprzednich zajęć. Następnie należy zaimplementować algorytm przeglądu zupełnego oraz rozpocząć pracę nad metodą podziału i ograniczeń.

Podczas ostatnich zajęć z drugiego tematu (zajęcia nr 7) będzie czas na dokończenie rozpoczętych zadań oraz na ocenę efektu końcowego. Na ocenę **3.0** należy poprawnie zaimplementować algorytm Johnsona dla $FP2||C_{\max}$. Za rozszerzenie algorytmu na więcej niż dwie maszyny ($m > 2$) jest przewidziane dodatkowe +0.25 do oceny. Napisanie metody siłowej przy użyciu standardowych bibliotek podnosi oceną o +0.25 lub w formie budowania drzewa o +0.5. Podstawowa wersja algorytmu bazującego na metodzie podziału i ograniczeń przewidziane jest +0.5 oraz maksymalnie +1.0 w zależności od jakości dolnych i górnych ograniczeń.

- Na ocenę 3.0 należy poprawnie zaimplementować algorytm Johnsona dla problemu $FP2||C_{\max}$.
- Na ocenę 4.0 należy poprawnie zaimplementować algorytm Johnsona dla problemu $FP2||C_{\max}$ oraz prosty BF i bardzo prosty BnB dla $FP||C_{\max}$ lub algorytm Johnsona oraz prosty BnB dla $FP||C_{\max}$.
- Na ocenę 5.0 należy poprawnie zaimplementować algorytm Johnsona, BF w formie drzewiastej oraz BnB z dobrym dolnym i górnym ograniczeniem dla $FP||C_{\max}$.

3 Problem

Problem $FP||C_{\max}$ jest szczególnym przypadkiem problemu ogólniejszego $F||C_{\max}$, gdzie na każdej maszynie byłaby inna kolejność wykonywania zadań. W obu przypadkach mamy zbiór n zadań:

$$\mathcal{J} = \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1)$$

które należy wykonać na m maszynach:

$$\mathcal{M} = \{1, 2, \dots, m\}, \quad (2)$$

każde j -te zadanie składa się dokładnie z m operacji

$$\mathcal{O}_j = \{o_{1j}, o_{2j}, \dots, o_{mj}\}. \quad (3)$$

Każda operacja o_{ij} z zadania j jest wykonywana kolejno na i -tej maszynie według kolejności technologicznej, w tym wypadku $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow m$. Czas wykonania (*performed time*) operacji o_{ij} wynosi p_{ij} . Na każdej maszynie naraz może wykonywać się tylko jedna operacja. W problemie przepływowym w ramach zadań musi być zachowany porządek technologiczny, tzn. aby mogła się zacząć wykonywać kolejna operacja to najpierw musi się zakończyć operacja poprzednia z tego samego zadania. Przez π oznaczmy kolejność wykonywania zadań (w permutacyjnym problemie przepływowym na każdej maszynie mamy tą samą kolejność wykonywania zadań).

W celu utworzenia harmonogramu dla permutacji π musimy utworzyć macierz S momentów rozpoczęcia operacji oraz macierz C momentów zakończenia operacji.

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{m1} & S_{m2} & S_{m3} & \dots & S_{mn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & C_{m3} & \dots & C_{mn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Przy układaniu harmonogramu należy pamiętać o dwóch ograniczeniach. Po pierwsze, kolejnie zadania (operacje) w ramach jednej maszyny i mogą zostać wykonane dopiero po zakończeniu swoich poprzedników.

$$S_{i\pi(j)} \geq C_{i\pi(j-1)} \quad (6)$$

Po drugie, musi być zachowany porządek technologiczny, więc przed rozpoczęciem kolejnej operacji w ramach tego samego zadania muszą zostać wykonane wrzyscie poprzednie operacje:

$$S_{i\pi(j)} \geq C_{i\pi(j-1)} \quad (7)$$

Uwzględniając oba ograniczenia możemy wyznaczyć czas rozpoczęcia operacji wzorem:

$$S_{i\pi(j)} = \max\{C_{i-1\pi(j)}, C_{i\pi(j-1)}\}. \quad (8)$$

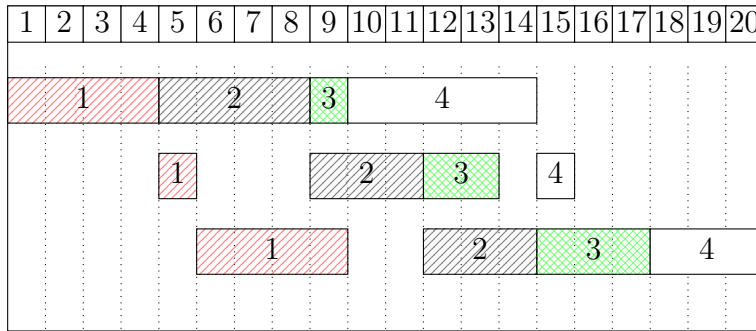
Ponownie kryterium optymalizacyjnym jest czas zakończenia wykonywania wszystkich zadań C_{\max}

$$C_{\max} = \max_{j \in \mathcal{J}} C_{m,\pi(j)}. \quad (9)$$

4 Przykład

Na Rysunku 1 pokazano schemat gantta przedstawiający harmonogram dla kolejności $\pi = (1, 2, 3, 4)$. Każda operacja została zaprezentowana w formie bloczku. Operacje w ramach jednego zadania są oznaczone tym samym numerkiem oraz kolorem. Na schemacie dobrze widać, że na maszynach pojawiają się przerwy (przestoje). Można również łatwo zaobserwować, że C_{\max} będzie zawsze równy momentowi zakończenia ostatniej operacji na maszynie m .

$$C_{\max} = C_{m,\pi(n)}. \quad (10)$$



Rysunek 1: Harmonogram problemu FSP dla $n = 4$, $m = 3$ oraz $\pi = (1, 2, 3, 4)$

Tabela 1: Instancja o rozmiarze $n = 4$ i $m = 3$

j	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}
1	4	1	4
2	4	3	3
3	1	2	3
4	5	1	3

5 Sposób generowania instancji

Dla parametru n , m oraz ziarna Z :

1. $\text{init}(Z)$.
2. Dla każdego $j \in \mathcal{J}$:
 - 2.1 Dla każdego $i \in \mathcal{M}$: $p_{ij} \leftarrow \text{nextInt}(1, 29)$

6 Metody rozwiązania

6.1 Johnson

Algorytm Johnsona jest metodą dedykowaną dla problemu $FP2||C_{\max}$. Ogólna idea algorytmu polega na kolejnym znajdowaniu operacji o najkrótszym czasie wykonywania na pierwszej lub drugiej maszynie. Następnie należy przyporządkować całe zadania na początku kolejności wykonywania zadań π jeśli krótsza operacja jest na maszynie pierwszej lub w przeciwnym wypadku na końcu. Procedura dla $FP2||C_{\max}$ zwraca rozwiązanie optymalne.

Algorithm 1 Johnson's Algorithm

```
1: procedure JOHNSON
2:    $l \leftarrow 1$ 
3:    $k \leftarrow n$ 
4:    $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{J}$ 
5:   while  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  do
6:      $j^*, i^* \leftarrow \operatorname{argmin}_{j \in \mathcal{N}, i \in \mathcal{M}} p_{ij}$ 
7:     if  $p_{1j^*} < p_{2j^*}$  then
8:        $\pi(l) \leftarrow j^*$ 
9:        $l \leftarrow l + 1$ 
10:    else
11:       $\pi(k) \leftarrow j^*$ 
12:       $k \leftarrow k - 1$ 
13:    end if
14:     $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \setminus \{j^*\}$ 
15:  end while
16:  return  $\pi$ 
17: end procedure
```

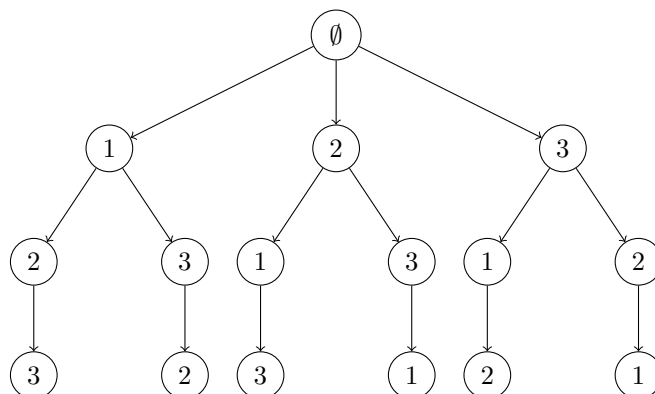
Istnieje wiele modyfikacji algorytmu Johnsona dla problemów o większej liczbie maszyn niż 2. Niestety wersje dla $m > 2$ nie mają gwarancji znalezienia optymalnego rozwiązania. Podstawowa modyfikacja dla $m = 3$ polega na uwzględnieniu czasu „środkowej” maszyny. W tym wypadku należy stworzyć dwie wirtualne maszyny. Przez p'_{ij} oznaczmy czas wykonywania na wirtualnych maszynach następująco:

$$\begin{aligned} p'_{1j} &= p_{1j} + p_{2j} \\ p'_{2j} &= p_{2j} + p_{3j} \end{aligned} \quad \text{dla } j \in \mathcal{J}. \quad (11)$$

Dla utworzonych w ten sposób dwóch maszyn wirtualnych można użyć podstawowej wersji algorytmu Johnsona. Dla $m > 3$ można policzyć analogicznie jak dla $m = 3$ lub wziąć pod uwagę jedynie czasy wykonywania operacji na pierwszej i ostatniej maszynie.

6.2 Metoda siłowa

Sprawdzenie wszystkich możliwych kombinacji (*Brute Force*). Dla zbioru $\mathcal{J} = \{1, 2, 3\}$ mamy $n!$ kombinacji: $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ i $(3, 2, 1)$. Przeglądanie drzewa stanu jest



Rysunek 2: Drzewo przestrzeni stanów dla $n = 3$

analogiczne to sposobu przeglądania w metodzie podziału i ograniczeń z pominięciem „odcięcia”.

6.3 Metoda podziału i ograniczeń

Podobnie jak przy algorytmie przeglądu zupełnego posłużymy się drzewem przestrzeni stanów przedstawionym na Rysunku 2. Algorytm w najgorszym wypadku może sprawdzić również wszystkie możliwe rozwiązania. Jednak aby tego uniknąć będziemy starać się odcinać „niekorzystne” rozwiązania oraz stosować różne strategie przeglądania.

Musimy zacząć od każdego wierzchołka, ponieważ badany problem nie ma charakteru cyklicznego. Następnie w danym węźle musimy przydzielić zadanie do maszyny oraz następnie obliczyć dolne oszacowanie (*lower bound*, LB). LB ogranicza rozwiązanie z dołu, to znaczy, że wartość C_{\max} w rozpatrywanej gałęzi nie może być lepsza niż wartość LB. Następnie jeśli węzeł będzie korzystny ($LB < UB$) czyli dolne oszacowanie będzie miało mniejszą wartość od górnego oszacowania (*upper bound*, UB) to węzeł będzie rozwijany. UB ogranicza rozwiązanie z góry, to znaczy, że wartość C_{\max} w rozpatrywanej gałęzi nie może być gorsza niż UB, za które jest podstawiona wartość funkcji celu najlepszego znajdującego do tej pory rozwiązania. W przypadku dojścia do liścia należy policzyć rzeczywistą wartość C_{\max} oraz uaktualnić UB, jeśli zachodzi taka potrzeba. W celu poprawienia wydajności algorytmu można stosować różne początkowe UB np.: rozwiązanie otrzymane algorytmem zachłannym. Oczywiście przy poprawianiu górnego ograniczenia należy pamiętać o zapamiętaniu permutacji π .

W ubogiej wersji algorytmu można podstawić początkowo nieskończoność za wartość górnego ograniczenia. Jednak jeśli chcemy zacząć odcinać jeszcze przed dojściem do liścia, możemy jako początkowe rozwiązanie wybrać: (1) permutację naturalną, (2) losowe (3) najlepsze z k -losowych (4) po innym algorytmie (np.: zmodyfikowany Johnson). Opisana metoda rekurencyjna reprezentuje sposób przeglądania drzewa stanu w głąb (*deep first search*). W literaturze można często spotkać również przeszukiwanie typu najpierw najlepszy (*best first search*) implementowane iteracyjnie przechowując węzły w kolejce priorytetowej.

Sercem algorytmu jest funkcja licząca LB. Zazwyczaj dla jednego problemu istnieje więcej niż jedna metoda liczenia LB. W tym wypadku trzeba uważać na dwie rzeczy: (1) jeśli przeszacujemy i zaniżymy wartość może się okazać, że nie odetniemy ani jednej gałęzi, przez co algorytm wykona się dłużej niż przegląd zupełny, (2) jeśli zawyżymy wartość, możemy odciąć dojście do optymalnego rozwiązania, przez co algorytm nie będzie działał poprawnie.

Algorithm 2 Branch and Bound

```
1:  $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{J}$ 
2:  $UB \leftarrow \text{INITUB}$ 
3: for each  $j \in \mathcal{N}$  do
4:    $\text{BNB}(j, \mathcal{N}, \pi)$ 
5: end for
6: procedure  $\text{BNB}(j^*, \mathcal{N}, \pi)$ 
7:    $\pi.\text{append}(j^*)$ 
8:    $\mathcal{N} \leftarrow \mathcal{N} \setminus \{j^*\}$ 
9:   if  $\mathcal{N} \neq \emptyset$  then
10:     $LB \leftarrow \text{BOUND}(\pi, \mathcal{N})$ 
11:    if  $LB < UB$  then
12:      for each  $j \in \mathcal{N}$  do
13:         $\text{BNB}(j, \mathcal{N}, \pi)$ 
14:      end for
15:    end if
16:  else
17:     $C_{max} \leftarrow \text{CALCULATE}(\pi)$ 
18:    if  $C_{max} < UB$  then
19:       $UB \leftarrow C_{max}$ 
20:       $\pi^* \leftarrow \pi$ 
21:    end if
22:  end if
23: end procedure
```

Jeśli mamy x zadań uszeregowanych oraz przez \mathcal{N} oznaczymy zbiór zadań jeszcze nieuszeregowanych to dla problemu $FP||C_{\max}$ możemy wyznaczyć dolne oszacowanie na cztery sposoby:

$$LB_0 = C_{m,x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{m,j} \quad (12)$$

$$LB_1 = \max_{i \in \mathcal{M}} (C_{i,x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{i,j}) \quad (13)$$

$$LB_2 = \max_{i \in \mathcal{M}} (C_{i,x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{i,j} + \sum_{k=i+1}^m \min_{j \in \mathcal{J}} p_{k,j}) \quad (14)$$

$$LB_3 = \max_{i \in \mathcal{M}} (C_{i,x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{i,j} + \sum_{k=i+1}^m \min_{j \in \mathcal{N}} p_{k,j}) \quad (15)$$

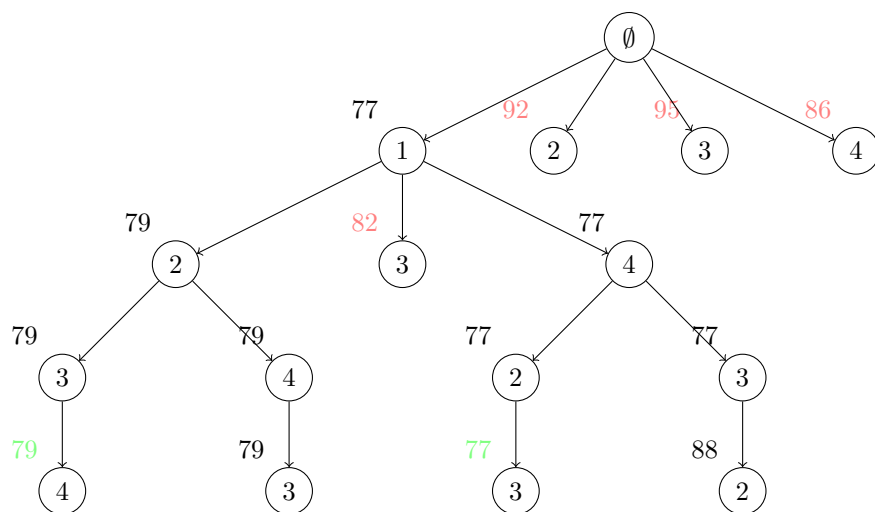
$$LB_4 = \max_{i \in \mathcal{M}} (C_{i,x} + \sum_{j \in \mathcal{N}} p_{i,j} + \min_{j \in \mathcal{N}} \sum_{k=i+1}^m p_{k,j}) \quad (16)$$

Założmy, że uszeregowane $x = 3$ zadań z $n = 6$ w kolejności $\pi = (2, 5, 1)$ na $m = 3$ maszynach, to dolne oszacowanie na podstawie wzoru (3) dla takiego rozwiązania wyniesie:

$$LB_3 = \max \begin{cases} C_{1,3} + p_{1,3} + p_{1,4} + p_{1,6} + \min\{p_{2,3}, p_{2,4}, p_{2,6}\} + \min\{p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,6}\} \\ C_{2,3} + p_{2,3} + p_{2,4} + p_{2,6} + \min\{p_{3,3}, p_{3,4}, p_{3,6}\} \\ C_{3,3} + p_{3,3} + p_{3,4} + p_{3,6} \end{cases} \quad (17)$$

Tabela 2: Instancja o rozmiarze $n = 4$ i $m = 2$

zadanie	p_{1j}	p_{2j}
1	1	14
2	16	42
3	19	5
4	10	15



Rysunek 3: Metoda podziału i ograniczeń

opracował: *dr inż. Radosław Idzikowski*