Wrocław, 28 lutego 2021

Zaawansowane **T**echniki **O**ptymalizacji

Laboratorium 1

Rozwiązywanie wybranych zadań optymalizacji w środowisku MS Excel

prowadzący: *dr inż. Jarosław Rudy*

1 Cel laboratorium

Celem laboratorium jest zapoznanie się ze sposobami modelowania i rozwiązywania przykładowych problemów optymalizacji ciągłej i dyskretnej z wykorzystaniem Solvera dostępnego w środowisku MS Excel. Obejmuje to odpowiednie zdefiniowane problemu (ograniczeń i funkcji celu), danych wejściowych oraz parametrów pracy Solvera, a także interpretację wyników. Laboratorium wprowadza też w podstawowe pojęcia związane z problematyką optymalizacji i programowania matematycznego.

2 Przebieg zajęć

Laboratorium obejmuje zajęcia nr 1 i 2 (około 3 godzin zajęć). Praca odbywa się w ramach grup dwuosobowych. Każda grupa otrzymuje do zrealizowania jeden problem optymalizacji dyskretnej, jeden problem optymalizacji ciągłej dwóch zmiennych oraz jeden problem optymalizacji ciągłej n zmiennych z poniższych list.

Zadania optymalizacji dyskretnej:

1. Problem sumy podzbioru.
2. Problem przydziału.
3. Zagadnienie transportowe.

Zadania optymalizacji ciągłej dwóch zmiennych:

1. Himmelblau's function.
2. Bukin function N.6.
3. Cross-in-tray function.
4. Eggholder function.
5. Hölder table function.
6. Schaffer function N. 4.

Zadania optymalizacji ciągłej n zmiennych:

1. Syblinski-Tang function.

2. Rastrigin function.
3. Rosenbrock function.
4. Sphere function.

Poszczególne problemy i funkcje do optymalizacji opisane są w osobnym pliku PDF na stronie kursu. Przydziału zadań do grup dokonuje prowadzący podczas zajęć.

Dla każdego zadania należy zdefiniować problem wliczając obliczanie funkcji celu i wszystkich komórek niezbędnych do określenia ograniczeń. Dla problemu optymalizacji dyskretnej należy również określić dane wejściowe. Na potrzeby tego laboratorium dane te mogą być np. losowe z pewnego rozsądnego zakresu[1].

Następnie należy określić parametry pracy Solvera oraz uruchomić Solver. Należy zbadać dostępne metody Solvera (czy uda się rozwiązać zadania korzystając z metody liniowej?). Można przeprowadzić testy dla funkcji zbliżonych (inne dane wejściowe dla problemu dyskretnego lub inne wartości współczynników dla funkcji ciągłej).

Ocena zależy od stopnia zaawansowania i poprawności rozwiązania oraz czasu oddania zadania.

3 Praca z Solverem MS Excel

Poniżej przedstawiono sposób instalacji dodatku Solver oraz przykład modelowania prostego problemu optymalizacji funkcji ciągłej jednej zmiennej na zadanym przedziale.

3.1 Przygotowanie środowiska

Przed przystąpieniem do właściwego modelowania i rozwiązywania problemów należy upewnić się, że posiadamy zainstalowany program MS Excel w wersji 2010 lub nowszej (preferowane 2019 lub 365) oraz że zainstalowany jest do niego dodatek Solver.

W celu instalacji dodatku należy przejść do zakładki „Dodatki” w opcjach programu Excel. Następnie w polu „Zarządzaj” należy wybrać „Dodatki programu Excel” oraz kliknąć przycisk „Przejdź...”. W nowym okienku należy zaznaczyć opcję „Dodatek Solver” i kliknąć przycisk „Ok”. Od teraz dodatek Solver powinien być dostępny w karcie „Dane” pod ikoną z symbolem .

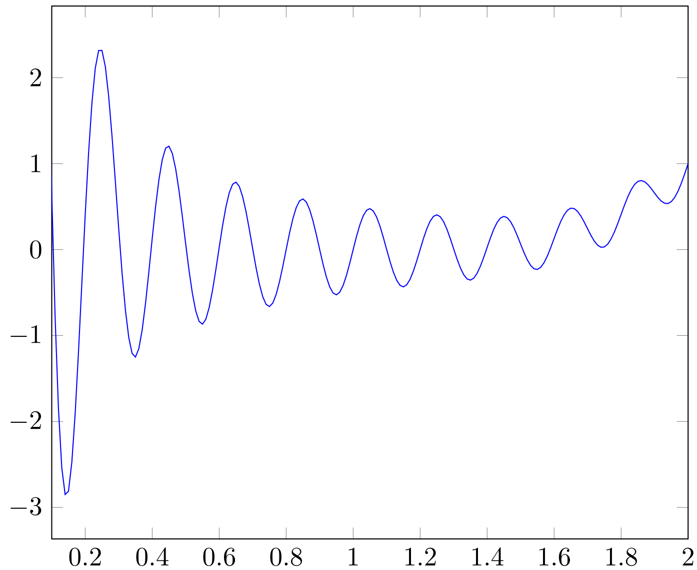
3.2 Optymalizacja ciągła funkcji jednej zmiennej

Rozpatrzmy optymalizację ciągła na przykładzie funkcji $f(x)$ jednej zmiennej danej wzorem:

$$f(x) = \frac{sin(10\pi x)}{2x} + (x-1)^4. \tag{1}$$

Wykres tej funkcji na przedziale $[0.01, 2]$ jest przedstawiony na Rysunku 1. Pokażemy teraz jak zoptymalizować tą funkcję za pomocą Solvera MS Excel.

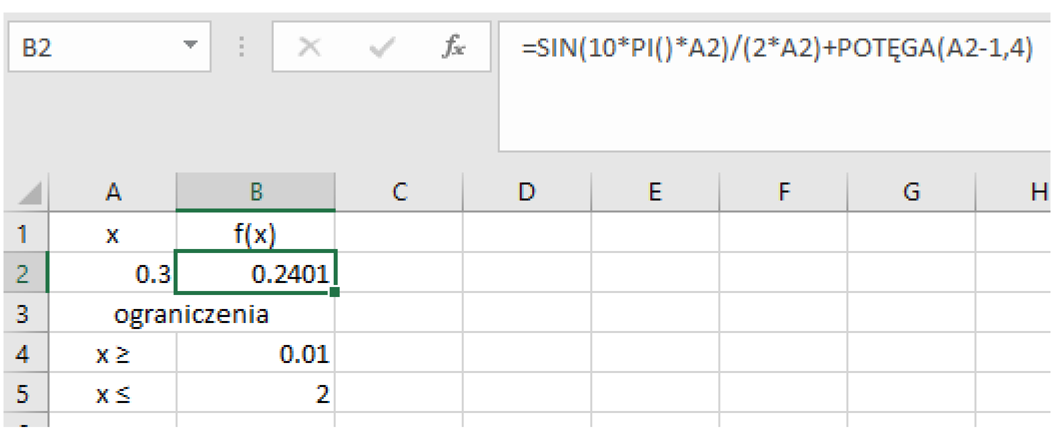
[1]Uwaga: w przypadku użycia danych losowych dobrze jest je losować w osobnym miejscu arkusza i kopiować, gdyż dane losowane funkcją `LOS()` zmieniają się na nowo po edycji dowolnej komórki.



Rysunek 1: Wykres funkcji $f(x)$ na przedziale $[0.01, 2]$

W tym problemie jedyną zmienną decyzyjną (którą Solver będzie manipulował) jest x. Wartości zmiennych decyzyjnych w ogólności stanowią rozwiązanie problemu (lub pewną reprezentację rozwiązania). Do reprezentacji tej zmiennej wykorzystamy jedną z komórek arkusza, w naszym przykładzie będzie to komórka `A2`. W komórce tej należy wpisać jakąś początkową wartość zmiennej x. Wartość ta powinna być taka, by spełniać wszystkie ograniczenia problemu (innymi słowy, początkowe rozwiązanie powinno być *dopuszczalne*). W naszym przypadku jedynym ograniczeniem na x jest by $x \in [0.01, 2]$, więc jako początkową wartość możemy ustalić np. 0.3 jak na Rysunku 2.

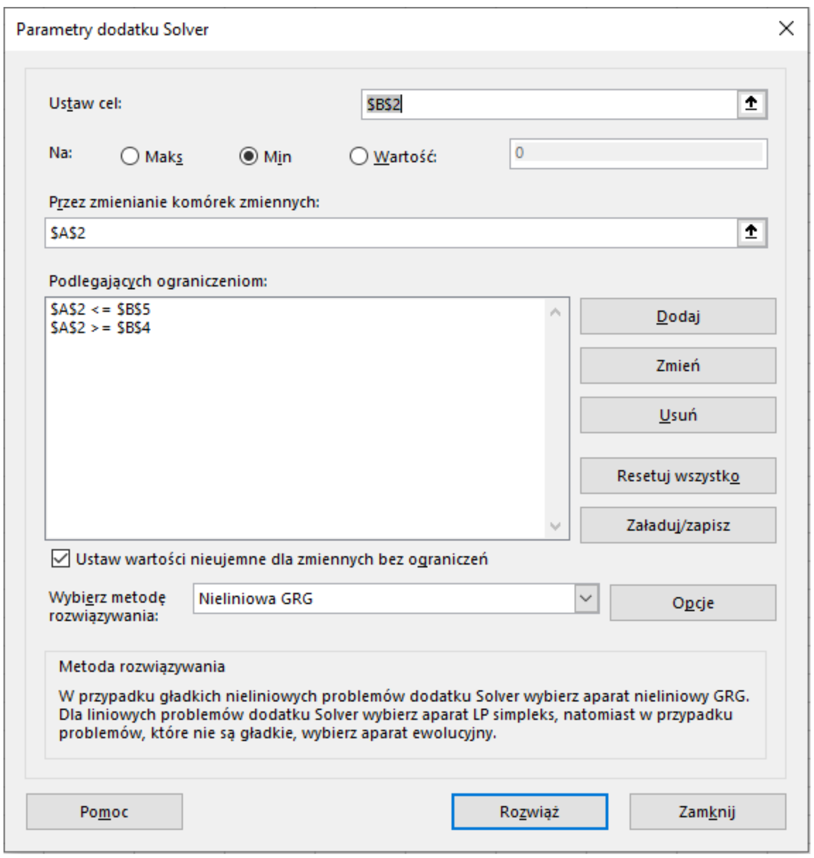
W następnej komórce (`B2`) wprowadzamy wzór na funkcję celu, czyli wartość $f(x)$ zgodnie z podanym wzorem (należy zwrócić uwagę na sposób dostępu do wartości π). Trzecim, bardzo istotnym elementem są komórki, w których umieścimy wartości związane z ograniczeniami. W tym przykładzie jedynymi ograniczeniami na jedyną zmienną decyzyjną są $x \geqslant 0.01$ oraz $x \leqslant 2$. Granice tego przedziału umieszczamy w komórkach `B4` oraz `B5` jak pokazano na rysunku 2.



Rysunek 2: Widok skoroszytu MS Excel

Po zdefiniowaniu problemu należy uruchomić dodatek Solver mając zaznaczoną komórkę zawierającą funkcję celu (komórka `B2`). Jeśli włączyliśmy Solver z odpowiedniej komórki, to „cel” optymalizacji będziemy mieli wskazany poprawnie. W przeciwnym razie należy wskazać komórkę zawierającą funkcję celu. Następnie wybieramy sposób optymalizacji (maksymalizacja, minimalizacja lub osiągniecie dokładnej wartości).

Kolejnym krokiem jest wskazanie zmiennych decyzyjnych. W naszym wypadku będzie to pojedyncza komórka `A2`, aczkolwiek w dalszych problemach będzie to raczej zakres komórek. Adres komórki możemy wpisać ręcznie lub wskazać po wciśnięciu przycisku . Teraz należy wprowadzić ograniczenia używając przycisku „Dodaj”. W nowym okienku wybieramy jakiej komórki dotyczy ograniczenie (pole po lewej) oraz jaki jest wartość ograniczenia (pole środkowe i prawe). Możliwe typy ograniczeń to `int` (komórka może przyjmować tylko wartości całkowite), `bin` (komórka może przyjmować tylko wartości 0 lub 1) oraz ograniczenia typu równość (=) lub nierówność ($>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$) oraz `dif` (wszystkie komórki w danym zakresie muszą mieć inną wartość). Uwaga: ograniczenia `int` oraz `bin` można stosować tylko dla komórek zmiennych decyzyjnych! Ostatnim krokiem jest wybranie metody rozwiązania. W naszym przypadku metodą to jest „Nieliniowa GRG”. Po wybraniu parametrów wynik powinien wyglądać tak jak pokazano to na Rysunku 3.



Rysunek 3: Wybór parametrów dodatku Solver

Po kliknięciu przycisku „Rozwiąż” powinien pojawić się komunikat o powodzeniu lub błędzie Solvera. Wynik zostanie wpisany do skoroszytu. Jest też możliwość wygenerowania raportów (w postaci osobnych arkuszy). Uwaga: dla metody ewolucyjnej wynik pokaże się dopiero po wykonaniu wszystkich obliczeń, więc należy pamiętać o określeniu maksymalnego czasu działania metody. Ustawienie to można znaleźć klikając przycisk „Opcje” tuż obok pola wyboru metody oraz przechodząc do zakładki „Ewolucyjna”. Wynik optymalizacji pokazano na Rysunku 4.

	A	B
1	x	f(x)
2	1.547288	-0.232259172
3	ograniczenia	
4	x ≥	0.01
5	x ≤	2

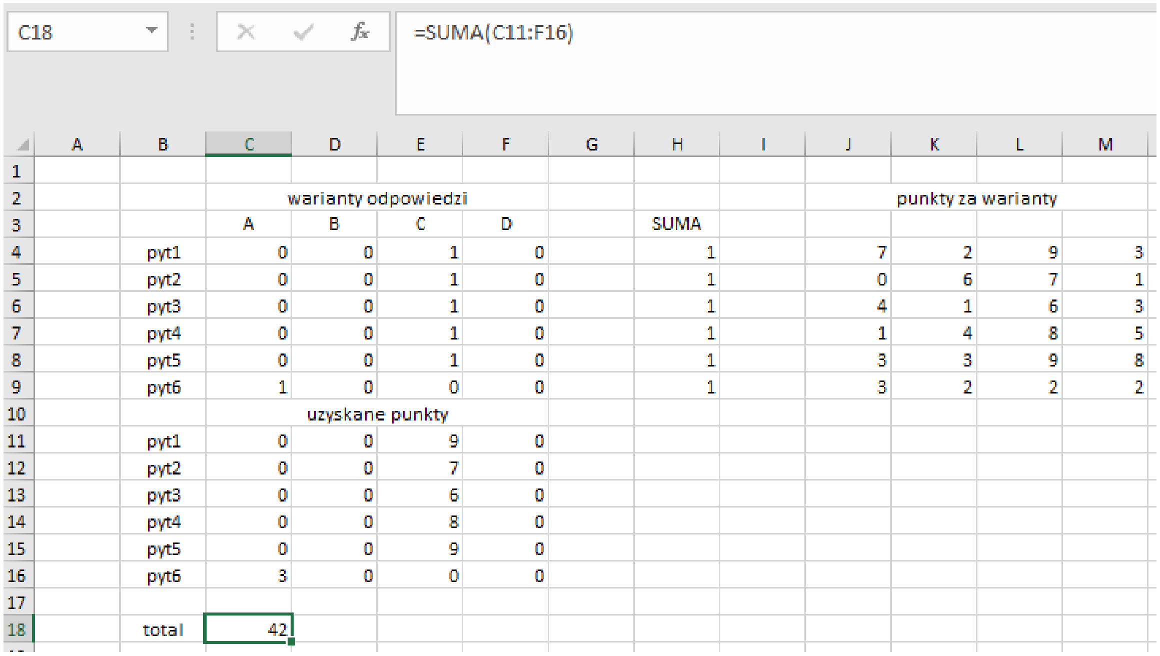
Rysunek 4: Wynik minimalizacji funkcji $f(x)$

3.3 Optymalizacja dyskretna prostego testu

Rozpatrzmy optymalizację dyskretną na przykładzie maksymalizacji wyników testu jednokrotnego wyboru. Dany jest test 6 pytań, gdzie dla każdego pytania podane są 4 warianty odpowiedzi, wraz z wartością punktową. Zadanie polega na wyborze dla każdego pytania jednego wariantu tak, aby zmaksymalizować sumę punktów uzyskanych za dany test. Zauważmy, że w każdym pytaniu można zaznaczyć co najwyżej jeden wariant. Można też nie zaznaczać żadnego wariantu (choć przy braku ujemnych punktów jest to nieuzasadnione).

Problem modelujemy następująco. W komórkach `C4:F9` znajduje się macierz o wymiarach 6×4 zawierająca 24 zmienne decyzyjne, reprezentujące wybór studenta. Jeśli dany wariant zaznaczono, to komórka przyjmuje wartość 1. W przeciwnym razie przyjmuje wartość 0. Następnie w komórkach `J4:M9` przygotowujemy wartości punktowe (wylosowane z przedziału $[0, 9]$) po jednej dla każdego wariantu odpowiedzi. Zauważmy, że ta macierz reprezentuje dane wejściowe (instancję problemu).

Następnie musimy zdefiniować komórkę zawierającą wartość funkcji celu. Do tego wygodnie jest zbudować pewne komórki, a w zasadzie całą macierz, zawierające obliczenia pośrednie. Ściślej, w komórki `C11:F16` wpisujemy iloczyn odpowiednich wartości z poprzednich dwóch macierzy. W ten sposób macierz ta będzie zawierała wartości punktowe tam gdzie zaznaczono dany wariant i zera w pozostałych komórkach. Teraz możemy już zdefiniować funkcję celu w komórce `C18` jako sumę wszystkich uzyskanych punktów, czyli sumę komórek z macierzy pośredniej `C11:F16`.



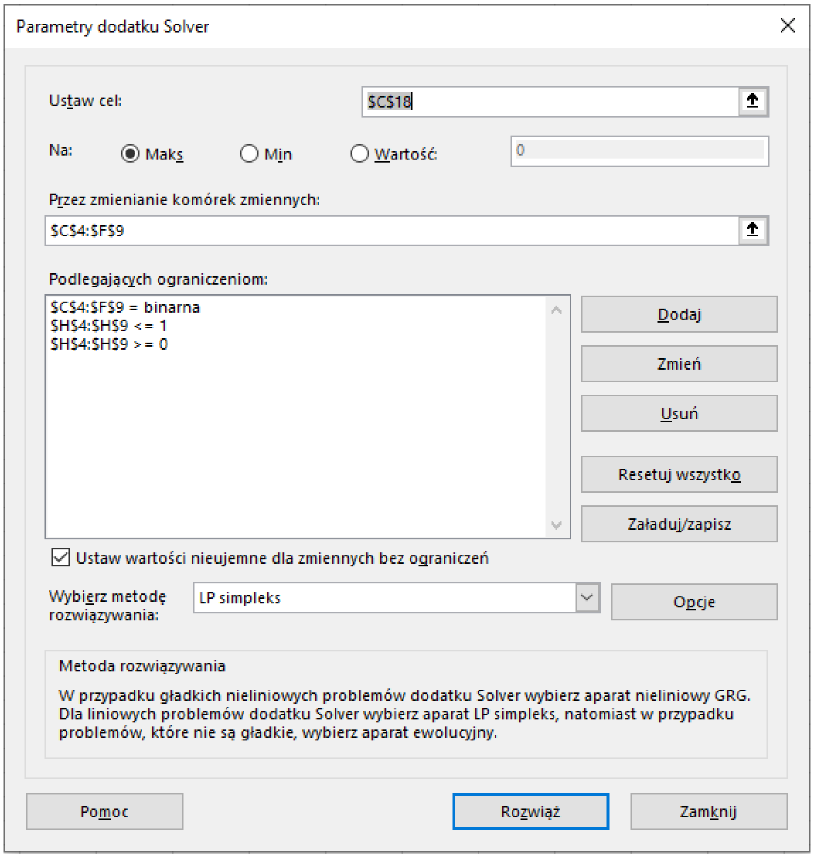
C18 =SUMA(C11:F16)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2			warianty odpowiedzi							punkty za warianty			
3			A	B	C	D		SUMA					
4		pyt1	0	0	1	0		1		7	2	9	3
5		pyt2	0	0	1	0		1		0	6	7	1
6		pyt3	0	0	1	0		1		4	1	6	3
7		pyt4	0	0	1	0		1		1	4	8	5
8		pyt5	0	0	1	0		1		3	3	9	8
9		pyt6	1	0	0	0		1		3	2	2	2
10			uzyskane punkty										
11		pyt1	0	0	9	0							
12		pyt2	0	0	7	0							
13		pyt3	0	0	6	0							
14		pyt4	0	0	8	0							
15		pyt5	0	0	9	0							
16		pyt6	3	0	0	0							
17													
18		total	42										

Rysunek 5: Widok skoroszytu MS Excel

Przejdźmy teraz do ograniczeń. Po pierwsze, zmienne decyzyjne mogą przyjmować jedynie wartości binarne. Ograniczenie to łatwo uzyskać dla całego zakresu `C4:F9` przypisując im typ ograniczenia `bin`. Zauważmy, że choć można każde takie ograniczenie definiować osobno, to dużo łatwiej i szybciej jest określić ograniczenie dla całego zakresu, które zostanie zastosowane dla każdej komórki z zakresu.

Większy problem stanowi ograniczenie, które mówi, że student może zaznaczyć co najmniej 0 i co najwyżej 1 wariant dla każdego pytania. Tutaj również posłużymy się komórkami "pośrednimi". Dla każdego pytania (wiersza macierzy) obliczamy sumę (np. dla pytania nr 1 będzie to formuła postaci `"=SUMA(C4:F4)"`). Aby ograniczenie było spełnione to każda taka suma musi być dokładnie 0 lub 1. Wiemy jednak, że sumujemy wartości zmiennych decyzyjnych, które są binarne. Wystarczy więc, że zapewnimy, że sumy są w przedziale $[0, 1]$. Musimy ustalić więc kolejnych 12 ograniczeń (6 ograniczeń typu $\geqslant 0$ oraz 6 typu $\leqslant 1$). Podobnie jak poprzednio dokonujemy tego dwoma ograniczeniami „grupowymi". Na zakończenie w parametrach Solvera wybieramy maksymalizację oraz metodę liniową „LP simpleks". Opisany model optymalizacji i parametry Solvera przedstawiono na Rysunkach 5 i 6.



Rysunek 6: Wybór parametrów dodatku Solver